

## A szögfelező hosszáról

Mostanában a (belső) *szögfelezőtétellel* és alkalmazásaival foglalkoztunk; így találkozunk a címbeli témával, [ 1 ] - ben is. Most erről a saját változatunkat adjuk elő.

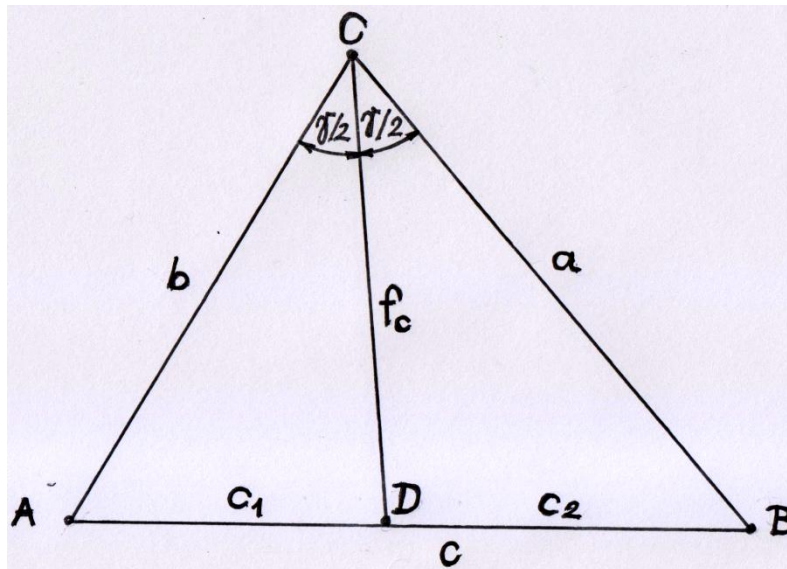
### A feladat

Adott egy  $ABC$  háromszög az  $a, b, c$  oldalaival.

Határozzuk meg a  $C$  csúsból induló  $f_c$  szögfelező szakasz hosszát!

### A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Erről leolvashatóan:

$$c = c_1 + c_2 ; \quad (1)$$

a szögfelezőtétellel kapjuk, hogy:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a} \rightarrow c_1 = \frac{b}{a} \cdot c_2 ; \quad (2)$$

most ( 1 ) és ( 2 ) - vel:

$$c = \frac{b}{a} \cdot c_2 + c_2 = c_2 \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \rightarrow c_2 = \frac{c}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{c \cdot a}{a + b}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{c_2 = \frac{c \cdot a}{a + b}} ; \quad (3)$$

majd ( 2 ) és ( 3 ) - mal:

$$\underline{c_1 = \frac{c \cdot b}{a+b}}. \quad (4)$$

Ezután koszinusztétellel:

$$c_1^2 = b^2 + f_c^2 - 2 \cdot b \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (5/1)$$

$$c_2^2 = a^2 + f_c^2 - 2 \cdot a \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (5/2)$$

( 5 ) egyenleteit rendezve:

$$2 \cdot b \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = b^2 + f_c^2 - c_1^2, \quad (6/1)$$

$$2 \cdot a \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = a^2 + f_c^2 - c_2^2. \quad (6/2)$$

A ( 6 ) egyenletek hányadosát képezve:

$$\frac{2 \cdot b \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot a \cdot f_c \cdot \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{b^2 + f_c^2 - c_1^2}{a^2 + f_c^2 - c_2^2} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b^2 + f_c^2 - c_1^2}{a^2 + f_c^2 - c_2^2}. \quad (7)$$

Átalakításokkal ( 7 ) -ből:

$$\begin{aligned} b \cdot a^2 + b \cdot f_c^2 - b \cdot c_2^2 &= a \cdot b^2 + a \cdot f_c^2 - a \cdot c_1^2, \\ f_c^2 \cdot (b - a) &= a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - a \cdot c_1^2 + b \cdot c_2^2, \\ f_c^2 \cdot (b - a) &= a \cdot b \cdot (b - a) + b \cdot c_2^2 - a \cdot c_1^2, \\ f_c^2 \cdot (a - b) &= a \cdot b \cdot (a - b) - b \cdot c_2^2 + a \cdot c_1^2; \end{aligned} \quad (8)$$

most ( 3 ), ( 4 ) és ( 8 ) - cal:

$$\begin{aligned} f_c^2 \cdot (a - b) &= a \cdot b \cdot (a - b) - b \cdot \frac{c^2 \cdot a^2}{(a+b)^2} + a \cdot \frac{c^2 \cdot b^2}{(a+b)^2}, \\ f_c^2 \cdot (a - b) &= a \cdot b \cdot (a - b) - a \cdot b \cdot \frac{c^2}{(a+b)^2} \cdot (a - b), \\ f_c^2 &= a \cdot b - a \cdot b \cdot \frac{c^2}{(a+b)^2} = a \cdot b \cdot \left[ 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right] = a \cdot b \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}, \quad \text{innen:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{f_c = \frac{\sqrt{a \cdot b \cdot [(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}}}, \quad (9)$$

egyezésben [ 1 ] - béli megfelelőjével.

A többi szögfelező hosszát hasonlóan eljárva kaphatjuk meg, ( **a**, **b**, **c** ) függvényében.

***Forrás:***

[ 1 ] – <http://lexikon.fazekas.hu/171.html>

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***  
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2019. 11. 04.